ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ ΣΕ ΔΙΚΤΥΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Μωυσιάδης Πολυχρόνης, Ανδρεάδης Ιωάννης

Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ.

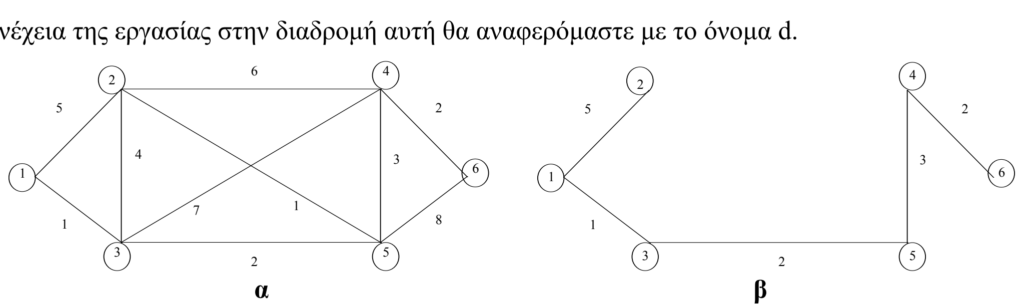
ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία μελέτη για την ελάχιστη διαδρομή σε δίκτυα μεταβλητού κόστους. Αρχικά παρουσιάζεται το πρόβλημα όταν τα βάρη των ακμών θεωρούνται σταθερά. Στην συνέχεια με τη βοήθεια μίας προσομοίωσης σε Η/Υ παρατηρείται η συμπεριφορά των δικτύων των οποίων τα βάρη είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν η ελάχιστη διαδρομή που προκύπτει με τη χρήση των μέσων τιμών είναι αξιόπιστη. Από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης προκύπτει η ανάγκη κατασκευής αλγορίθμου για την εύρεση της αμέσως μεγαλύτερης από την ελάχιστη διαδρομή. Τέλος διατυπώνονται κάποια συμπεράσματα και προτάσεις.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα συχνά εμφανιζόμενα προβλήματα στη μελέτη των δικτύων είναι αυτό της εύρεσης ελαχίστης διαδρομής από ένα κόμβο ο οποίος ονομάζεται αρχή σε έναν άλλο ο οποίος ονομάζεται τέλος. Το βάρος ή στάθμη (weight) της κάθε ακμής θεωρείται σταθερό. Για τη λύση του προβλήματος εφαρμόζεται συνήθως ο αλγόριθμος του Dijkstra. (βλ. Winston (1991)).

Έστω g το δίκτυο της Εικόνας 1α στην οποία φαίνονται οι κόμβοι και οι ακμές με το βάρος τους. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Dijkstra, βρίσκουμε τη ελάχιστη διαδρομή που εμφανίζεται στην Εικόνα 1β, με συνολικό βάρος, από τον κόμβο 1 στον κόμβο 6 ίσο με 8 μονάδες. Στη συνέχεια της εργασίας στην διαδρομή αυτή θα αναφερόμαστε με το όνομα d.



α **β**

Εικόνα 1

2. ΔΙΚΤΥΑ ΜΕ ΑΚΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ.

Έστω τώρα ότι το δίκτυο g έχει ακμές μεταβλητού βάρους. Παράδειγμα τέτοιου δικτύου είναι το σύνολο διαδρομών σε μία πόλη, όπου ο χρόνος εξαρτάται από τον κυκλοφοριακό φόρτο. Σε τέτοια δίκτυα όπως του παραδείγματος που αναφέρουμε παραπάνω, ο χρόνος από τον ένα κόμβο στον άλλο είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κάποια κατανομή. Αν τα βάρη έχουν μεγάλες μέσες τιμές σε σχέση με τη διασπορά η πιθανότητα εμφάνισης αρνητικής τιμής για κάποια ακμή είναι πολύ μικρή. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη κανονική κατανομή για τις ακμές του δικτύου g. Επίσης η βήτα κατανομή έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορα δίκτυα των οποίων οι ακμές είναι τυχαίες μεταβλητές, όπως για παράδειγμα στα προβλήματα PERT. (βλ. Malcolm et al (1959)).

Σημειώνουμε ότι η LogNormal κατανομή είναι αυτή της οποίας αν λογαριθμήσουμε τις τιμές θα πάρουμε την αντίστοιχη κανονική κατανομή. Η LogNormal κατανομή είναι προτιμότερη της Κανονικής (Gaussian/Normal) κατανομής επειδή μας εξασφαλίζει ότι οι τιμές των ακμών θα είναι θετικές. Επίσης όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία συνήθως η κατανομή των ακμών ενός δικτύου παρουσιάζει λοξότητα προς τα δεξιά. (βλ. MacCrimmon, K.R., Ryavec, C.A. (1964).). Ακόμη, από την ευκολία υπολογισμού τιμών της λογαριθμοκανονικής κατανομής σε συνδυασμό με τα προαναφερθέντα προκύπτει ότι η χρησιμοποίησή της στο πρόβλημα της ελάχιστης διαδρομής σε δίκτυα με ακμές μεταβλητού βάρους θα ήταν χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ (SIMULATION)

Επιστρέφουμε στο παράδειγμα του δικτύου που παραθέτουμε στην αρχή της εργασίας. Αυτή τη φορά θα θεωρήσουμε ότι τα βάρη των ακμών δεν είναι σταθερές, αλλά τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή αυτή που φαίνεται στο σχέδιο και διασπορά τέτοια ώστε η αντίστοιχη κανονική κατανομή της καθεμιάς να έχει την ίδια τυπική απόκλιση. Αυτό δεν σημαίνει βέβαια ότι οι αντίστοιχες λογαριθμοκανονικές κατανομές έχουν την ίδια διασπορά, αλλά ότι ο λόγος διασποράς προς μέση τιμή είναι ίδιος για όλες τις μεταβλητές.

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε το πρόβλημα της εύρεσης της ελαχίστης διαδρομής σε διάφορες στάθμες της τυπικής απόκλισης. Χρησιμοποιήσαμε το πακέτο λογισμικού «Mathematica» για να πάρουμε αποτελέσματα προσομοίωσης του προβλήματος αυτού στον Η/Υ. Κατασκευάστηκε ένα μικρό πρόγραμμα που εκμεταλλεύεται τις βιβλιοθήκες και τις συναρτήσεις του «Mathematica», το οποίο για κάθε στάθμη της τυπικής απόκλισης κάνει εκατό (100) επαναλήψεις. Σε κάθε μία από αυτές τα βάρη των ακμών παίρνουν μία τιμή από την κατανομή που ακολουθεί το καθένα. Θεωρώντας αυτές τις τιμές των βαρών ως σταθερές εφαρμόζεται ο αλγόριθμος του Dijkstra για την εύρεση της ελαχίστης διαδρομής.

Στον Πίνακα 1 που παραθέτουμε φαίνεται ένα απόσπασμα των αποτελεσμάτων.

Πίνακας 1

Τυπική Απόκλιση της αντίστοιχης Κανονικής Κατανομής	Συχνότητα Εμφάνισης της διαδρομής {1, 3, 5, 4, 6} ως ελάχιστη	Συχνότητα Εμφάνισης της διαδρομής {1, 3, 4, 6} ως ελάχιστη
0.12	100	0
0.13	98	2
0.14	98	2
0.15	94	5
0.16	96	4
0.17	93	5
0.18	93	6

Παλαιότερες μελέτες που έχουν γίνει στην περιοχή του προβλήματος της εύρεσης της ελάχιστης διαδρομής σε δίκτυα με ακμές μεταβλητού κόστους αφορούν στην εύρεση της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής της ελάχιστης διαδρομής (βλ. Frank, H. (1969).). Ο υπολογισμός της όμως, προϋποθέτει πολύπλοκους υπολογισμούς που καθιστούν την χρήση της μεθόδου δύσκολη. Την ίδια προσέγγιση στο πρόβλημα κάνουν και οι Sigal, C.E., Pritsker, A.A.B., Solberg J.J. (1980) ελαττώνοντας την πολυπλοκότητα των υπολογισμών, αλλά και πάλι απαιτείται αρκετός κόπος για να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος.

Το πρόβλημα που τίθεται στην παρούσα εργασία είναι διαφορετικό. Το ερώτημα είναι αν και υπό ποιες συνθήκες, είναι αξιόπιστο να χρησιμοποιούμε τις μέσες τιμές για την εύρεση της ελάχιστης διαδρομής και όχι ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής της ελάχιστης διαδρομής. Θεωρώντας ότι μία πρόταση είναι στατιστικά αξιόπιστη όταν το ποσοστό λάθους είναι κάτω του 5%, θα πρέπει να βρούμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες υφίσταται αυτή η αξιοπιστία.

Στο παραπάνω πίνακα 1 φαίνεται ότι για τιμές της τυπικής απόκλισης μεγαλύτερες του 0.14 η συχνότητα εμφάνισης της d είναι μικρότερη του 95 και εμφανίζεται με ποσοστό άνω του 5% μία άλλη διαδρομή η οποία είναι η αμέσως μεγαλύτερη. Τη διαδρομή αυτή στο εξής θα την αποκαλούμε d2.

Έτσι λοιπόν από τις συνεχείς προσομοιώσεις που έγιναν προέκυψε ότι το ποσοστό λάθους είναι συνάρτηση δύο παραγόντων: α) της τυπικής απόκλισης της αντίστοιχης κανονικής κατανομής και β) της διαφοράς της ελαχίστης διαδρομής d από την αμέσως μεγαλύτερη d2. Έτσι προκύπτει η ανάγκη εύρεσης της αμέσως μεγαλύτερης από την ελάχιστη διαδρομή.

4. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ.

Έχουν γίνει διάφορες μελέτες για την ταξινόμηση των μονοπατιών από ένα κόμβο του δικτύου σε ένα άλλο. Μία από αυτές είναι του Martins, V.Q. (1984) ο οποίος κατασκεύασε έναν αλγόριθμο κατά τον οποίο σε κάθε βήμα αντικαθίσταται το δίκτυο με ένα επεκτεταμένο στο οποίο υπάρχουν όλα τα μονοπάτια εκτός από αυτό που βρέθηκε στο προηγούμενο βήμα ως ελάχιστο. Για την περίπτωση όμως που το δίκτυο είναι πυκνό και η ελάχιστη διαδρομή αποτελείται από λίγες ακμές, θα ήταν χρήσιμος και ο παρακάτω αλγόριθμος, ο οποίος βασίζεται στην εξής σκέψη: αν αφαιρεθούν από το δίκτυο μία-μία οι ακμές που αποτελούν την ελάχιστη διαδρομή και σε καθένα από τα ζευγνύοντα υπογραφήματα εφαρμοστεί ο αλγόριθμος του Dijkstra θα δημιουργηθεί ένα σύνολο διαδρομών. Η μικρότερη από αυτές θα αποτελεί και την δεύτερη (αμέσως μεγαλύτερη) ελάχιστη διαδρομή. Ο αλγόριθμος ο οποίος υλοποιήθηκε στο «Mathematica» έχει ως εξής:

α).Υπολογίζουμε την ελάχιστη διαδρομή d από τον αρχικό κόμβο 1, στο τελικό 6, θεωρώντας σα σταθερά βάρη των ακμών τις μέσες τιμές των κατανομών. Έτσι για το g έχουμε ότι d={{1,3},{3,5},{5,4},{4,6}}. β).Αφαιρούμε από το γράφημα g, τη πρώτη ακμή που ανήκει στο μονοπάτι (path) d. Στο υπογράφημα ζεύξης (spanning subgraph) του g που προκύπτει εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης της ελαχίστης διαδρομής. γ).Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για τις υπόλοιπες ακμές του d. Τέλος κρατάμε σαν αμέσως μεγαλύτερη ελάχιστη διαδρομή τη διαδρομή με το μικρότερο συνολικό βάρος.

Πίνακας 2		
Υπογράφημα ζεύξης	Ελάχιστη διαδρομή	Βάρος
g-{1,3}	{1, 2, 5, 4, 6}	11
g-{3,5}	{1, 3, 4, 6}	10
g-{5,4}	{1, 3, 4, 6}	10
g-{4,6}	{1, 3, 5, 6}	11

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, όπως φαίνονται στον Πίνακα 2 η αμέσως μεγαλύτερη ελάχιστη διαδρομή είναι η d2={1,3,4,6} με βάρος 10.

Σημειώνουμε ότι στη περίπτωση που στο υπό μελέτη δίκτυο υπάρχει και δεύτερη διαδρομή με συνολικό βάρος ίδιο με αυτό της ελάχιστης διαδρομής, ο αλγόριθμος θα μας δώσει αυτή τη διαδρομή σαν αποτέλεσμα. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να συνεχίσουμε σε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις:

α)Αν θεωρήσουμε τις δύο διαδρομές απόλυτα ισοδύναμες, μπορούμε να βρούμε την αμέσως μεγαλύτερη από αυτές χρησιμοποιώντας μία παραλλαγή του παραπάνω αλγόριθμου. Συγκεκριμένα σε κάθε κύκλο του παραπάνω αλγορίθμου θα θεωρούμε το υπογράφημα ζεύξης το οποίο θα προκύπτει από το αρχικό αν κάθε φορά αφαιρούμε δύο ακμές. Μία από τη πρώτη ελάχιστη και μία από τη δεύτερη, έτσι όπως προκύπτουν από τους ανά δύο συνδυασμούς τους.

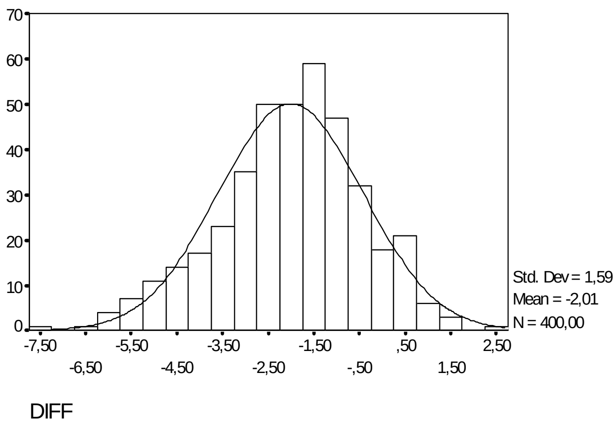
β) Αν δεν θεωρήσουμε τις δύο διαδρομές απόλυτα ισοδύναμες και μας ενδιαφέρει να δούμε ποια από τις δύο διαδρομές είναι καλύτερη μπορούμε να φτάσουμε σε συμπεράσματα χρησιμοποιώντας πάλι την προσομοίωση στο «Mathematica».

5. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Έχοντας υπολογίσει την ελάχιστη διαδρομή d καθώς και τη δεύτερη ελάχιστη d2, έχουμε τα βάρη τους τα οποία είναι τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή το άθροισμα των μέσων τιμών των αντίστοιχων ακμών και διασπορά τα αθροίσματα των διασπορών. Αν το πλήθος των ακμών είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να εφαρμόζεται το Κ.Ο.Θ., μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα βάρη των δύο ελαχίστων διαδρομών είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονικές κατανομές.

Αν οι δύο διαδρομές δεν έχουν κοινές ακμές, μπορούν να θεωρηθούν ως ανεξάρτητες μεταβλητές. Στη περίπτωση αυτή η διαφορά των βαρών των δύο ελαχίστων διαδρομών μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή τη διαφορά των δύο βαρών (για το υπό μελέτη παράδειγμα -2) και διασπορά το άθροισμα των διασπορών των δύο βαρών.

Στην περίπτωση που οι δύο διαδρομές δεν είναι ξένες μεταξύ τους παύει να ισχύει η ανεξαρτησία. Αν ισχύει κάτι τέτοιο (βλ. Frank, H. (1969).) στη θέση της διαφοράς πρέπει να μπει η μεταβλητή που προκύπτει από την διαφορά μόνο των ξένων κομματιών των δύο διαδρομών, η οποία θα έχει την ίδια μέση τιμή αλλά μικρότερη διασπορά. Η μεταβλητή αυτή πάλι εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις του Κ.Ο.Θ., μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί κανονική κατανομή, γεγονός που επαληθεύθηκε από την προσομοίωση όπως φαίνεται και γραφικά στο σχήμα.



Διατυπώνουμε τις προτάσεις:

1. Αν *το 95 ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της διαφοράς είναι μεγαλύτερο του 0, τότε υπάρχει πιθανότητα άνω του 0,05 η δεύτερη ελάχιστη διαδρομή d2 να είναι μικρότερη από την d.*
2. *Η πιθανότητα η διαφορά να είναι μικρότερη του μηδενός μας δίνει τη σχετική συχνότητα εμφάνισης της d.*

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ (SIMULATION)

Στα αποτελέσματα της προσομοίωσης που εμφανίζονται στον Πίνακα 3 μπορούμε να δούμε ότι δίνοντας στη τυπική απόκλιση της αντίστοιχης κανονικής κατανομής τιμές από 0,11 έως 0,24 παίρνουμε το 95% ποσοστιαίο σημείο της ίδιας κατανομής, καθώς και την πιθανότητα η διαφορά να είναι μικρότερη του μηδενός. Επίσης μπορούμε να δούμε ποια μονοπάτια και πόσες φορές εμφανίζονται ως ελάχιστα. Στο πίνακα αυτόν φαίνεται να ισχύουν οι προτάσεις μας.

Πίνακας 3

Τυπική Απόκλιση της αντίστοιχης Κανονικής Κατανομής	95 ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της Διαφοράς	Πιθανότητα η Διαφορά να είναι μικρότερη του μηδέν	Συχνότητα Εμφάνισης της διαδρομής {1,3,5,4,6}ως ελάχιστη	Συχνότητα Εμφάνισης της διαδρομής {1,3,4,6} ως ελάχιστη
0,11	-0,5623	0,9889	100	
0,12	-0,4289	0,9819	100	
0,13	-0,2948	0,9731	98	2
0,14	-0,1599	0,9631	98	2
0,15	-0,0242	0,9520	94	5
0,16	0,1125	0,9403	96	4
0,17	0,2501	0,9281	93	5
0,18	0,3887	0,9158	93	6
0,19	0,5284	0,9034	89	10
0,2	0,6693	0,8911	80	17
0,21	0,8114	0,8790	85	12
0,22	0,9548	0,8672	88	9
0,23	1,0996	0,8557	84	9
0,24	1,2458	0,8446	84	7

ABSTRACT

This paper considers the problem of the reliability of the expected shortest path in graphs where edge lengths are random variables with lognormal distribution. A Monte Carlo simulation is used in order to observe the performance of the variable cost networks. Based on the Monte Carlo results, it develops a heuristic method to calculate the expected shortest path's reliability, designed in such a way as to keep computational needs to a minimum. It also presents an alternative method for determining the K best paths in a graph, which could be useful for small K values in dense graphs whose shortest path consists of a small number of edges.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Winston, W.L. (1991): Introduction to mathematical programming: applications and algorithms. PWS-KENT, Boston.

Malcolm, D.G., Roseboom, J.H., Clarck C.E., Fazar, W. (1959): Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation. *Operations Research*, 7, 646-669.

MacCrimmon, K.R., Ryavec, C.A. (1964): An Analytical Study of the PERT Assumptions. *Operations Research*, 12, 16-37.

Frank, H. (1969): Shortest Paths in Probabilistic Graphs. *Operations Research*, 17, 583-599.

Sigal, C.E., Pritsker, A.A.B. Solberg J.J. (1980): The Stochastic Shortest Route Problem. *Operations Research*, 28, 1122-1129.

Martins, V.Q. (1984): An algorithm for ranking paths that may contain cycles. *European Journal of Operational Research*, 18, 123-130.