Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ WEIBULL ΣΤΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ ΕΡΓΩΝ (PERT)

Ιωάννης Ανδρεάδης & Χρόνης Μωυσιάδης

Τμήμα Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η τεχνική PERT χρησιμοποιείται για τον χρονικό προγραμματισμό μεγάλων έργων σε συνθήκες αβεβαιότητας. Τις περισσότερες φορές η κατανομή της χρονικής διάρκειας μίας δραστηριότητας είναι άγνωστη και η εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς της γίνεται με τη χρήση τριών υποκειμενικών εκτιμήσεων, οι οποίες γίνονται από το αρμόδιο πρόσωπο. Σε αυτή την εργασία προτείνουμε τη χρήση της Weibull κατανομής ως προσέγγισης της άγνωστης θεωρητικής κατανομής της χρονικής διάρκειας μιας PERT δραστηριότητας. Με τη χρήση της Weibull κατανομής επιτυγχάνεται καλύτερη εκτίμηση της χρονικής διάρκειας του συνολικού έργου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο χρονικός προγραμματισμός έργων αποτελεί ένα από τα σοβαρότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει όποιος ασχολείται με τη διαχείριση έργων (project management) βλ. Moder, Philips & Davis (1983). Για αυτό το σκοπό γίνεται η χρήση δικτύων δραστηριοτήτων (activity networks), όπως αυτά έχουν μελετηθεί από τον Elmaghraby (1977), με την βοήθεια των οποίων δίνεται η δυνατότητα εκτίμησης του χρόνου ολοκλήρωσης του έργου και αναγνώρισης των κρίσιμων δραστηριοτήτων του.

Μία από τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στα δίκτυα δραστηριοτήτων είναι και η τεχνική PERT, η οποία έγινε αρχικά γνωστή από τη δημοσίευση Malcolm, Roseboom, Clark & Fazar (1959) ως αποτέλεσμα της μελέτης για το χρονικό προγραμματισμό της κατασκευής του πυραύλου POLARIS.

Η τεχνική PERT δέχεται ότι ο χρόνος που θα διαρκέσει η κάθε δραστηριότητα είναι μία τυχαία μεταβλητή με άγνωστη κατανομή και συνεπώς η εκτίμηση της διάρκειάς της θα πρέπει να γίνεται με αβεβαιότητα. Η αβεβαιότητα στην εκτίμηση της διάρκειας της δραστηριότητας εκφράζεται με την υποκειμενική εκτίμηση τριών τιμών. Έτσι από τον ειδικό της κάθε δραστηριότητας ζητείται μία εκτίμηση κεντρικής τάσης (επικρατούσα τιμή ή διάμεσος), καθώς επίσης και μία αισιόδοξη και μία απαισιόδοξη εκτίμηση για τη διάρκεια της δραστηριότητας.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Οι Keefer και Verdini (1993) έχουν συγκρίνει διάφορες προσεγγίσεις της μέσης τιμής και της διασποράς της διάρκειας T μίας PERT δραστηριότητας και έχουν παρουσιάσει αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία δείχνουν ότι το μοντέλο P-T (extended Pearson-Tukey) που προτείνουν, είναι αυτό που δίνει τις πιο ακριβείς προσεγγίσεις ανάμεσα σε αυτές που συγκρίνουν. Οι προσεγγίσεις του μοντέλου P-T είναι οι παρακάτω:

$$\hat{\mu}_{PT} = 0,630 t_{0,50} + 0,185\left(t_{0,95} + t_{0,05}\right) \qquad (1)$$

$$\hat{\sigma}^2_{PT} = 0,630\left(t_{0,50} - \hat{\mu}_{PT}\right)^2 + 0,185\left[\left(t_{0,95} - \hat{\mu}_{PT}\right)^2 + \left(t_{0,05} - \hat{\mu}_{PT}\right)^2\right] \qquad (2)$$

όπου t_p είναι τέτοιο ώστε $\Pr\left(T \le t_p\right) = p$. Οι Pearson και Tukey (1965) ήταν οι πρώτοι που πρότειναν την προσέγγιση (1) και οι Keefer και Verdini την εφάρμοσαν στη μέθοδο PERT και εισήγαγαν την προσέγγιση (2). Εφόσον οι θεωρούμενες ως πιο ακριβείς προσεγγίσεις μέχρι σήμερα, δηλαδή οι προσεγγίσεις (1) και (2), απαιτούν την υποκειμενική εκτίμηση των τριών ποσοστιαίων σημείων $\left(t_{0,05}, t_{0,50}, t_{0,95}\right)$, σε αυτό το εδάφιο και εμείς θα υποθέσουμε ότι ο ειδικός που κάνει τις εκτιμήσεις σχετικά με τη διάρκεια της κάθε δραστηριότητας θα μας δώσει εκτιμήσεις για τα ίδια ποσοστιαία σημεία.

Έχοντας αυτές τις τρεις υποκειμενικές εκτιμήσεις που γίνονται από τον ειδικό της δραστηριότητας, προτείνουμε μία νέα μέθοδο για την προσέγγιση της μέσης τιμής και της διασποράς του χρόνου της δραστηριότητας. Ο μέθοδος που προτείνουμε ξεκινά με την εκτίμηση πρώτα των παραμέτρων μίας θεωρητικής κατανομής που προσεγγίζει την άγνωστη κατανομή. Στη συνέχεια με δεδομένες τις παραμέτρους της προσεγγιστικής κατανομής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους θεωρητικούς τύπους για την μέση τιμή και διασπορά αυτής της προσεγγιστικής κατανομής, για να προσεγγίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της άγνωστης κατανομής.

Έτσι οδηγούμαστε στην χρήση κατανομών τριών παραμέτρων με τη βοήθεια εκτιμητών ποσοστιαίων σημείων. Οι εκτιμητές ποσοστιαίων σημείων (percentile estimators) μπορούν να θεωρηθούν ως υποκατηγορία των εκτιμητών ελαχίστων αποστάσεων (minimum distance estimators, Parr (1981)).

Μία χρήσιμη κατανομή για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η Weibull. Η ποικιλομορφία της Weibull την έχει καταστήσει εδώ και χρόνια ως την πιο κατάλληλη κατανομή για την περιγραφή μοντέλων διάρκειας ζωής. Εφαρμογές της βρίσκουμε στα πεδία της μετεωρολογίας, της ιατρικής, των οικονομικών, της βιολογίας κλπ. Επιπλέον η κατανομή αυτή έχει όλες τις ιδιότητες που σήμερα είναι αποδεκτές για την κατανομή της διάρκειας μιας PERT δραστηριότητας.

Η κατανομή της τ.μ. Y ονομάζεται Weibull τριών παραμέτρων, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y είναι της μορφής:

$$f_Y(y) = \frac{c}{b}\left(\frac{y-\xi}{b}\right)^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{y-\xi}{b}\right)^{c}\right] \quad y>\xi, \quad b,c>0 \tag{3}$$

Με το σύμβολο $W\left(\xi,b,c\right)$ θα συμβολίζουμε αυτή την κατανομή.

Αν γ_i είναι τέτοιο ώστε $\gamma_i = \Gamma\left(1+\frac{i}{c}\right), \quad i=1,2,3...$ όπου με Γ συμβολίζεται η Γάμα συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τ.μ. Y δίνεται από:

$$E_W\left(Y\right) = \gamma_1 b + \xi \tag{4}$$

και η διασπορά δίνεται από:

$$Var_W\left(Y\right) = \left(\gamma_2 - \gamma_1^{\,2}\right)b^2 \tag{5}$$

Οι παράμετροι της Weibull μπορούν να εκτιμηθούν με την εξίσωση των τριών σημείων με τα αντίστοιχα θεωρητικά και απαιτείται η χρήση αριθμητικής μεθόδου για την εκτίμηση της παραμέτρου θέσης.

Αν η τ.μ. $Y \sim W(\xi, b, c)$, τότε το ποσοστιαίο σημείο y_p για το οποίο $\Pr(Y \leq y_p) = p$ δίνεται από την εξίσωση:

$$y_p = b\left[-\log(1-p)\right]^{1/c} + \xi \qquad (6)$$

Αν υποθέσουμε ότι ο ειδικός κάνει υποκειμενική εκτίμηση των τριών ποσοστιαίων σημείων $(y_{0,05}, y_{0,50}, y_{0,95})$, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της Weibull κατανομής από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} y_{0.05} &= bA^{1/c} + \xi \\ y_{0.50} &= bB^{1/c} + \xi \\ y_{0.95} &= bC^{1/c} + \xi \end{aligned} \qquad (7)$$

όπου και $A = \log(20/19)$, $B = \log(2)$ και $C = \log(20)$.

Σύμφωνα με τους Cheng και Amin (1983), οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους της Weibull κατανομής παρουσιάζουν προβλήματα (η πιθανοφάνεια σε ορισμένες περιπτώσεις τείνει στο άπειρο). Αυτό έχει ωθήσει αρκετούς ερευνητές στην εξερεύνηση εκτιμητών ποσοστιαίων σημείων για τη Weibull κατανομή (π.χ. Zanakis και Mann (1982)). Μάλιστα, σύμφωνα με το Schmid (1997), ένα σύστημα εξισώσεων σαν το παραπάνω λύνεται αναλυτικά εφόσον το μεσαίο ποσοστιαίο σημείο ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου των άλλων δύο ποσοστιαίων σημείων, δηλαδή αν τα τρία ποσοστιαία σημεία είναι $y_1 < y_2 < y_3$, θα πρέπει να ισχύει $y_2 = \sqrt{y_1 y_3}$. Εμείς έχουμε $y_1 = y_{0,05}$ και $y_3 = y_{0,95}$ άρα για να λυθεί αναλυτικά το σύστημα θα έπρεπε να ισχύει $y_2 \approx y_{0,32}$ αντί $y_{0,50}$.

Συνεπώς το σύστημα εξισώσεων (7) δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Μπορούμε όμως να καταλήξουμε σε μία εξίσωση της μορφής $\psi(\xi) = 0$ και να βρούμε μία αριθμητική προσέγγιση αυτής της συνάρτησης. Παρόμοιες προσεγγίσεις με χρήση αριθμητικών μεθόδων για την εύρεση εκτιμητών ποσοστιαίων σημείων της κατανομής Weibull έχουν χρησιμοποιηθεί και από τους Carmody, Eubank &

Lariccia (1984). Η εξίσωση (8) προκύπτει από το σύστημα εξισώσεων (7) και εξαρτάται μόνο από το ξ :

$$y_{0.50}-\xi-\left(y_{0.95}-\xi\right)\left(B/C\right)^{\phi(\xi)}=0 \qquad (8)$$

όπου $\phi(\xi)=\log\left[\left(y_{0,95}-\xi\right)/\left(y_{0,05}-\xi\right)\right]\Big/\log\left(C/A\right)$.

Από τη σχέση (8) και χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Newton με ένα κατάλληλο αρχικό σημείο μπορούμε να βρούμε μία προσεγγιστική αριθμητική λύση $\hat{\xi}_N$ του ξ. Στην συνέχεια μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της Weibull κατανομής από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned}
&\hat{\xi}=\hat{\xi}_N\\
&\hat{c}=\frac{\log\left(C\right)-\log\left(A\right)}{\log\left(y_{0,95}-\hat{\xi}\right)-\log\left(y_{0,05}-\hat{\xi}\right)}\\
&\hat{b}=\frac{y_{0,95}-\hat{\xi}}{C^{1/\hat{c}}}
\end{aligned} \qquad (9)$$

Με αυτό τον τρόπο η άγνωστη κατανομή της τ.μ. T μπορεί να προσεγγιστεί από την Weibull κατανομή $W\left(\hat{\xi},\hat{b},\hat{c}\right)$ και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (4) και (5) προκειμένου να εκτιμήσουμε αντίστοιχα την μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. T.

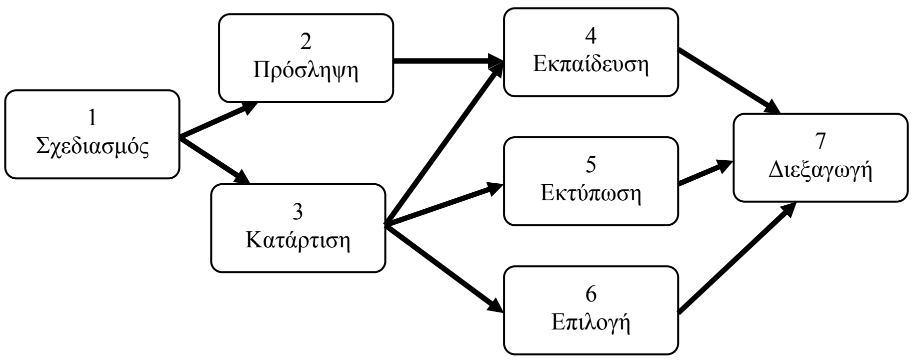
Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Τα τελευταία χρόνια, λόγω της συνεχόμενης αύξησης της υπολογιστικών δυνατοτήτων των Η/Υ, οι μέθοδοι προσομοίωσης προβάλουν, όλο και περισσότερο, σαν ο καλύτερος τρόπος εκτίμησης της κατανομής του συνολικού χρόνου ενός έργου. Στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρείται ότι η κατανομή της διάρκειας της δραστηριότητας είναι γνωστή. Στην πράξη όμως αυτό συμβαίνει σπάνια και η συνολική πληροφορία που έχουμε για τις δραστηριότητες είναι οι τρεις υποκειμενικές εκτιμήσεις που γίνονται από τον ειδικό – υπεύθυνο της κάθε δραστηριότητας.

Άρα προκύπτει η αναγκαιότητα της εκτίμησης των παραμέτρων της κατανομής της διάρκειας των PERT δραστηριοτήτων από τις τρεις εκτιμήσεις για το χρόνο της δραστηριότητας. Η λύση που κυρίως προτείνεται μέχρι σήμερα είναι να κάνουμε προσαρμογή τριγωνικής κατανομής σε αυτές τις τρεις εκτιμήσεις. Σαν εναλλακτική βελτιωμένη λύση στην παρούσα πρακτική προτείνουμε την χρήση της Weibull κατανομής με τον τρόπο που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε την συμπεριφορά του μοντέλου μας όσον αφορά την προσέγγιση της κατανομής του συνολικού χρόνου αλλά και για να τη συγκρίνουμε με τη συμπεριφορά του άλλου μοντέλου (Τριγωνική) χρησιμοποιήσαμε τεχνικές προσομοίωσης (Monte Carlo). Η διαδικασία έχει ως εξής:

Αρχικά θεωρούμε ότι η κατανομή του χρόνου της διάρκειας της κάθε δραστηριότητας είναι μία γνωστή Βήτα κατανομή. Αυτό το κάνουμε για να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη «γνωστή» κατανομή σε ένα μοντέλο προσομοίωσης του δικτύου έτσι ώστε να υπάρχει μία βάση σύγκρισης για τις προσεγγιστικές κατανομές. Εκτελούμε τη διαδικασία της προσομοίωσης και θεωρούμε τα αποτελέσματα από την προσομοίωση αυτή ως τα «πραγματικά» αποτελέσματα. Στη συνέχεια κάνουμε προσαρμογή α) Τριγωνικής κατανομής, και β)Weibull κατανομής, σύμφωνα με όσα έχουν αναπτυχθεί στο προηγούμενο εδάφιο. Για κάθε μία από τις κατανομές που προκύπτουν εκτελούμε ξανά τη διαδικασία προσομοίωσης. Στο τέλος μετράμε την ακρίβεια της κάθε προσεγγιστικής κατανομής συγκρίνοντας τα αποτελέσματά της με αυτά της «γνωστής» Βήτα κατανομής. Το δίκτυο που χρησιμοποιούμε για τη διαδικασία της σύγκρισης είναι ένα απλό δίκτυο PERT με επτά δραστηριότητες σαν αυτό της παρακάτω εικόνας.



Ολόκληρη η διαδικασία της σύγκρισης των προσεγγιστικών δραστηριοτήτων επαναλήφθηκε τρεις φορές. Την πρώτα φορά όλες οι δραστηριότητες είχαν σχεδόν συμμετρικές κατανομές της μορφής $beta[10,70,9,10]$, την δεύτερη φορά πήραμε κατανομές με μέτριο συντελεστή λοξότητας $beta[10,70,3,5,10]$ και τη τρίτη με σημαντικό συντελεστή λοξότητας $beta[10,70,1,5,10]$, έτσι ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της κάθε προσεγγιστικής κατανομής κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Για όλες τις προσομοιώσεις που χρησιμοποιήθηκαν, για μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιήθηκε η τεχνική του αρνητικού συντελεστή συσχέτισης η οποία με το ίδιο αριθμό δειγμάτων δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα από την κλασική προσομοίωση Monte Carlo. Η λογική της τεχνικής προσομοίωσης με χρήση μεταβλητών με αρνητικό συντελεστή συσχέτισης (antithetic variates) όπως αυτή προτείνεται από τους Sullivan, Hayya, & Schaul, (1982), βασίζεται στο ότι αν έχουμε δύο αμερόληπτους εκτιμητές t και t_A του συνολικού χρόνου του έργου, οι οποίοι έχουν αρνητικό συντελεστή συσχέτισης, τότε ο εκτιμητής $1/2(t+t_A)$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του συνολικού χρόνου του έργου και επιπλέον έχει μικρότερη διασπορά.

Σε όλες τις προσομοιώσεις που δοκιμάσαμε η συμπεριφορά του μοντέλου που προτείνουμε (Weibull) έδωσε πιο ακριβείς εκτιμήσεις από τη χρήση του μοντέλου της Τριγωνικής κατανομής. Μάλιστα όσο περισσότερο λοξές είναι οι κατανομές από τις οποίες αποτελείται το δίκτυο τόσο πιο αισθητή γίνεται η βελτίωση του μοντέλου που προτείνουμε έναντι του μοντέλου της Τριγωνικής κατανομής.

ABSTRACT

PERT is a network-oriented technique for planning large projects. In most of the cases the distributions of PERT activity durations are unknown. Hence, three time estimates are required as a means of eliciting information about the activity duration. These three estimates are utilized to obtain approximations of the mean and the variance of the activity duration. What we attempt to do in this paper is to fit Weibull distribution to these three time estimates and propose the theoretical mean and variance of this distribution as new approximations of the mean and variance of the unknown distribution. Simulation results indicate that the use of the Weibull distribution provides a more accurate estimation of the time of the project.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carmody, T.J., Eubank, R.L., & Lariccia, V. N. (1984). A family of minimum quantile distance estimators for the three parameter Weibull distribution. *Statistical Papers*, 25:69-82.

Cheng, R.C.H. & Amin, R.C.H. (1983). Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B, Methodological*, 45(3):394-403.

Elmaghraby, Salah E. (1977). *Activity Networks*. Wiley, New York.

Keefer, D. L. & Verdini, W. A. (1993). Better estimation of PERT activity time parameters. *Management Science*, 39(9):1086-1091.

Malcolm, D. G., Roseboom, J. H., Clark, C. E., & Fazar, W. (1959). Application of a technique for research and development program evaluation. *Operations Research*, 7:646-669.

Moder, J. J., Philips, C. R., & Davis, E. W. (1983). *Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming*. Van Nostrand Reinhold, New York, 3rd edition.

Parr, W.C. (1981). Minimum distance estimation: a bibliography. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 10:1205-1224.

Pearson, E. S. & Tukey, J. W. (1965). Approximate means and standard deviations based on distances between percentage points of frequency curves. *Biometrika*, 52(3):533-546.

Schmid, Uve (1997). Percentile estimators for the three-parameter Weibull distribution for use when all parameters are unknown. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 26(3):765-785.

Sullivan, R.S., Hayya, J.C. & Schaul, R. (1982). Efficiency of the antithetic variate method for simulating stochastic networks. *Management Science*, 28(5):563-572.

Zanakis, S.H., & Mann, N.R. (1982). A good simple percentile estimator of the Weibull shape paremeter for use when all three parameters are unknown. *Naval Research Logistics Quarterly*, 29:419-428.